Chapitre 3 : Variables aléatoires continues



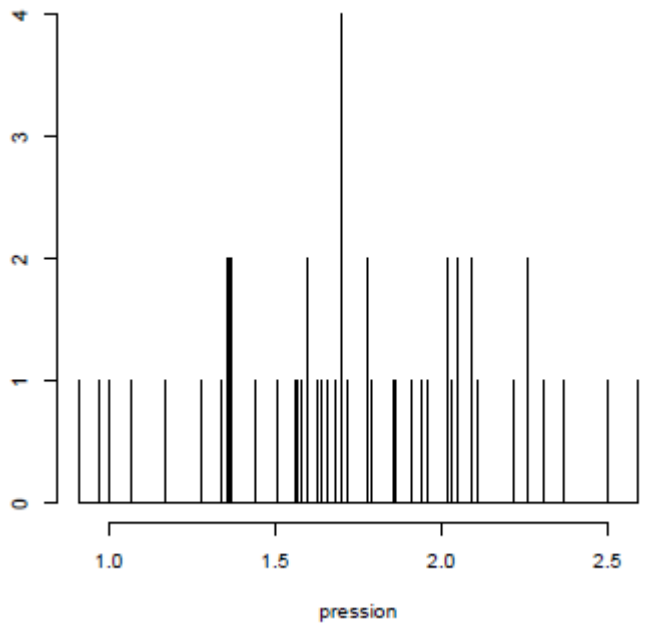
Rappel complet de probabilités

Objectifs :

- Loi normale
- Centrage/dispersion
- Règle des 68%, 95%, 99,7%
- Loi exponentielle

Introduction

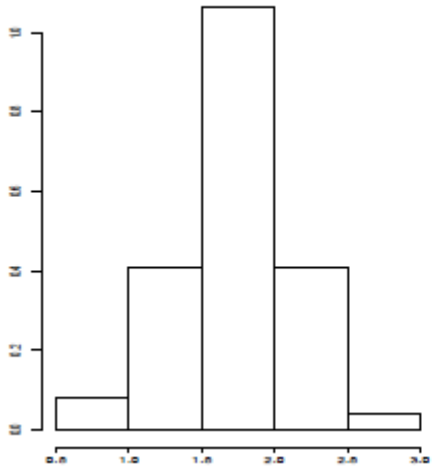
Un industriel fait relever régulièrement la pression dans une cuve de réaction chimique.
Voici les mesures obtenues en bar :
2.50 1.37 1.57 1.28 1.64 1.37 2.05 2.11 1.00 1.72
1.96 1.70 2.03 2.26 1.60 1.70 2.09 1.79 1.66 2.09
1.58 1.78 2.02 2.22 1.51 2.59 1.94 1.36 2.31 1.36
0.97 1.07 0.91 2.05 1.70 1.70 1.17 2.02 2.26 1.78
1.60 1.63 1.68 1.34 1.56 1.91 1.86 1.44 2.37

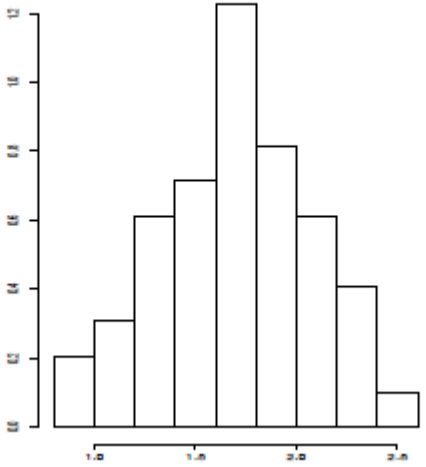


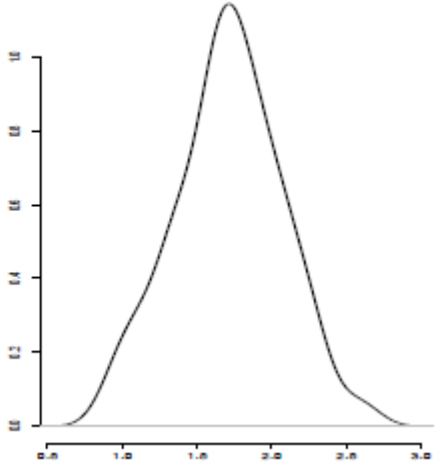
Cette représentation graphique n'est pas pertinente : on regroupe les valeurs pour tracer un histogramme.

Introduction

Suivant le nombre de classes choisi, on obtient différents tracés. On peut imaginer de raffiner encore en faisant d'autres mesures avec des instruments de mesure plus précis.







Loi continue

On aurait alors une courbe, d'aire 1 comme les histogrammes, qui représente la manière dont sont réparties les valeurs de la v.a. *X* (voir les graphes et les données ci-dessus).
Cette courbe est la courbe d'une fonction appelée densité de probabilité ou simplement densité. Une densité *f* décrit la loi d'une v.a. *X* en ce sens :

$$Pour\ tout\ a, b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx}$$

On en déduit qu'une densité doit vérifier :

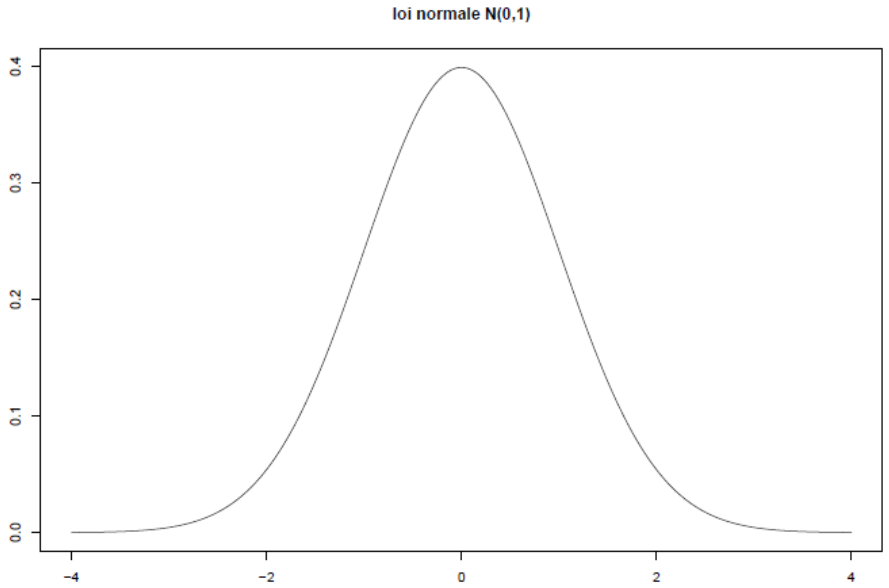
- $\boldsymbol{Pour\ tout\ x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0}$
- $\boldsymbol{\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1}$

La loi normale centrée réduite:

C'est la loi la plus importante. Son rôle est central dans de nombreux modèles probabilistes et dans toute la statistique. Elle possède des propriétés intéressantes .

Définition : *Une v.a. X suit une loi normale (ou loi gaussienne ou loi de Laplace-Gauss) N*(0; 1) *si sa densité f est donnée par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad pour\ tout\ x \in \mathbb{R}$$



La loi normale centrée réduite

La v.a. X est centrée*, c'est-à-dire de moyenne nulle, et* réduite*, 'est- à-dire de variance 1.*

$$X \sim N(0;1) \ \ alors\ E(X) = 0\ et\ Var(X) = 1$$

Preuve ?

Table de La loi normale centrée réduite

Voici comment se présente une table de loi N(0,1). On lit dans la table de loi ci-dessus les différentes valeurs que peut prendre P(X≤x) lorsque x est positif.

1. Lire P(X≤3,14)
2. Calculer P(X>2,67)
3. Calculer P(2,67≤X≤3,14)
4. On me donne 0,7673 comme valeur et on me demande à quelles probabilités correspond à cette valeur ?
5. Déterminer x tel que P(-x ≤ X ≤x)= 0,6826
6. Déterminer x tel que P(-x ≤ X ≤x)= 0,9544
7. Déterminer x tel que P(-x ≤ X ≤x)= 0,9973

Chiffre des centièmes

Chiffre des unités et des dixièmes

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

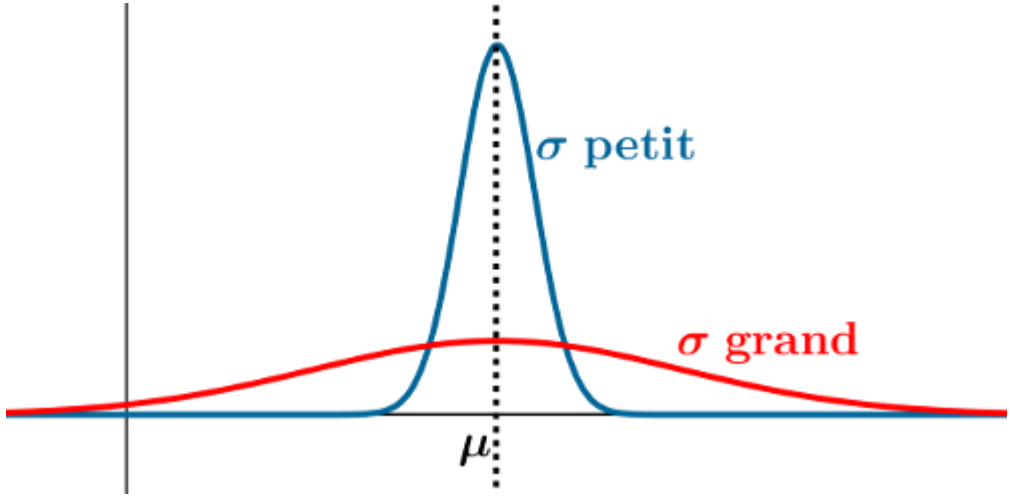
https://major-prepa.com/mathematiques/comment-lire-table-loi-normale-centree-reduite/

InSIC GIP Institut Supérieur d'Ingénierie de la Conception

La loi normale $N(\mu;\sigma)$ cas général

Une v.a. X suit une loi normale $N(\mu;\sigma)$ si sa densité f est donnée par:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Centrer et réduire la loi normale $N(\mu;\sigma)$

Proposition importante :

Si X suit une loi normale $N(\mu;\sigma)$ **alors ,** $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ***suit une loi normale centrée réduite N*****(0*;* 1).**

Exemple : Soit *X* une v.a. de loi *N*(15*;* 4). Quelle est la probabilité *P*[10 ≤*X* ≤22] en utilisant la table de N(0;1) ?

Règle des 68%; 95% et 99,7%

Soit Y une v.a. de loi $N(0; 1)$.

$P[-1 \leq Y \leq 1] = 0{,}6826$

$P[-2 \leq Y \leq 2] = 0{,}9544$

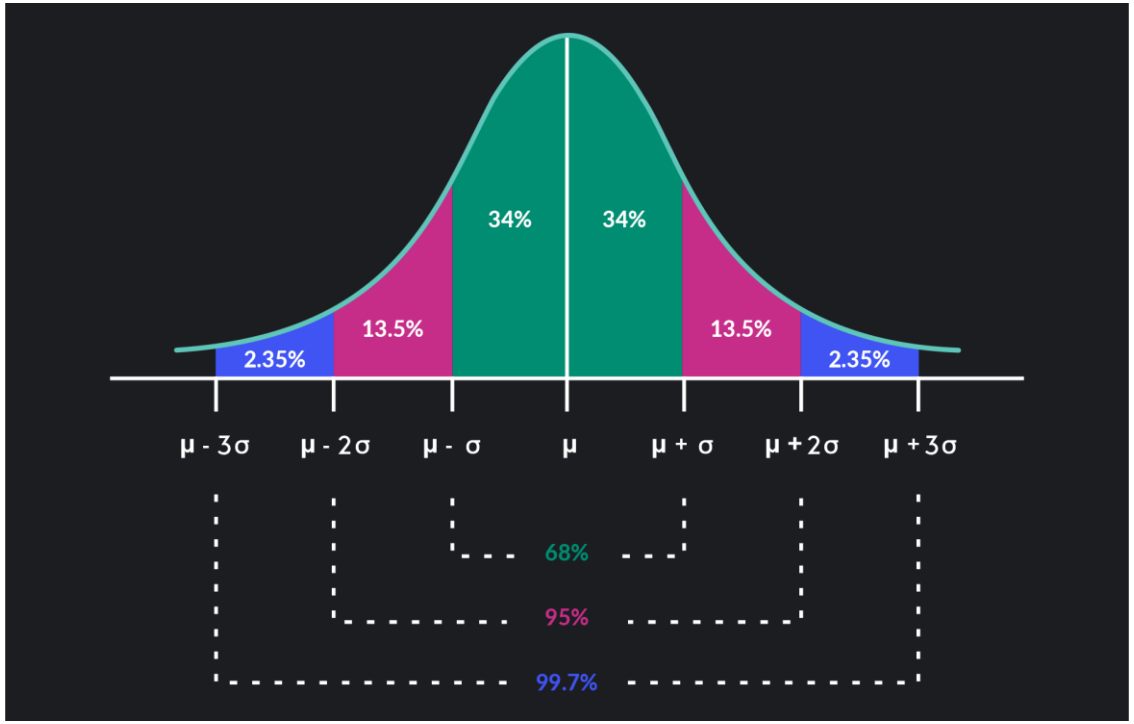
$P[-3 \leq Y \leq 3] = 0{,}9973$

Alors si X une v.a. de loi $N(\mu; \sigma)$.

$P[\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma] = 0{,}6826$

$P[\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma] = 0{,}9544$

$P[\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma] = 0{,}9973$



Exemple sans calculatrice et sans table

Exercice de contrôle qualité
Une usine fabrique des résistances électriques dont la résistance nominale est de 100 ohms. La résistance mesurée suit une loi normale de moyenne $\mu=100$ ohms et d'écart-type $\sigma=3$ ohms.
Questions :

1. Quelle est la proportion de résistances dont la valeur est comprise entre 97 ohms et 103 ohms?
2. L'usine considère que les résistances sont **conformes** si leur valeur est comprise entre 94 ohms et 106 ohms. Quelle proportion de résistances est conforme ?
3. Quelle est la probabilité qu'une résistance soit **non conforme** ?
4. Si l'usine veut que 99,7% des résistances soient conformes, quel devrait être le nouvel intervalle de tolérance autour de la moyenne ?

Loi exponentielle

Une v.a. X est dite de loi exponentielle E(λ) si sa densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$$

Elle est utilisée dans de nombreuses applications :
- durée de fonctionnement d'un matériel informatique avant la première panne,
- désintégration radioactive,
- temps séparant l'arrivée de deux \clients" dans un phénomène d'attente (guichet, accès µa un serveur informatique, arrivée d'un accident du travail...).

Loi exponentielle calculs de probabilité

Une v.a. X est dite de loi exponentielle E(λ) alors :

$$P(X \leq x) = \cdots$$

$$P(X \geq x) = \cdots$$

$$P(a \leq X \leq b) = \cdots$$

E(X) = $\frac{1}{\lambda}$ et Var(X) =$\frac{1}{\lambda^2}$

Lien entre loi exponentielle et loi normale

Rôles des deux lois

- **Loi exponentielle**
  - Modélise un **temps d'attente**, une **durée de vie**
  - Utilisée en fiabilité, maintenance, files d'attente
  - Asymétrique, définie sur $[0,+\infty[$
  - Propriété d'absence de mémoire
- **Loi normale**
  - Modélise une **variabilité autour d'une moyenne**
  - Résultat de l'agrégation de nombreux effets aléatoires
  - Symétrique, définie sur R

Lien entre loi exponentielle et loi normale

> **La somme de variables exponentielles indépendantes tend vers une loi normale**

Si

$$X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exponentielle}(\lambda)$$

alors pour n grand :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathcal{N}\left(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2}\right)$$