Chapitre 2 : Variables aléatoires discrètes



Rappel complet de probabilités

Objectifs :

- Rappels de définitions.
- Indépendance et conditionnement
- Schéma de Bernoulli et loi Binomiale
- Loi Géométrique, Loi de Poisson et Loi Uniforme

Définition Variable aléatoire et loi de probabilité :

Définition 1 : *Une **variable aléatoire** (v.a.) X est une **fonction** définie sur l'univers Ω , qui **associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée**. Ainsi, à chaque événement élémentaire !, on associe un nombre X(ω).*

Exemple: On lance trois fois une pièce de monnaie, et on définit la VA égale au nombre de pile lors des 3 lancers.

1) A chaque événement élémentaire associez la valeur de X(ω).
2) Faire un tableau (appelé **loi de probabilité**) qui à chaque valeur de X associe sa probabilité

Définition Variable aléatoire et loi de probabilité :

Solution exemple :

1)

ω	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
X(ω)	3	2	2	1	2	1	1	0

Loi de probabilité :

Valeur de X : k	0	1	2	3
Proba de X=k : P(X=k)	1/8	…	…	…

Définition Fonction de répartition:

- Définition 2 : *Soit X une v.a. On appelle fonction de répartition de X la fonction de* R *dans* [0; 1]*, définie pour tout x* ∈ R *par*

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Suite Exemple:

Valeur de X : k	0	1	2	3
Proba de X=k : P(X=k)	1/8	3/8	3/8	1/8
P(X≤ k)	1/8	4/8	…	…

D'où :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \leq 0 \\ \frac{1}{8} si \; 0 < x \leq 1 \\ \frac{4}{8} si \; 1 < x \leq 2 \\ \ldots \; si \; 2 < x \leq 3 \\ \ldots \; si \; x > 3 \end{cases}$$

Définition Espérance d'une VA:

Définition 3 : *L'espérance ou moyenne d'une v.a. discrète X est le réel*

$E[X] = \sum k \times P(X = k)$

où on somme sur toutes les valeurs k que peut prendre X.

Suite Exemple: Calcul de l'espérance de X :

$E[X] = \sum k \times P(X = k)$

E[X]=…

Définition Variance et écart-type d'une VA:

Définition 3 : ***La variance d'une v.a****. discrète X est le réel positif*

$$Var[X] = E[(X - E(X))^2]$$

$$Var[X] = \sum (k - E(X))^2 \times P(X = k))$$

$$\boldsymbol{Var[X] = E(X^2) - E(X)^2}$$

*et **l'écart-type de X** est la racine carrée de sa variance.*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Définition Variance et écart-type d'une VA:

Suite Exemple: Calcul de la variance et écart-type de X :

Var(X) = E(X²)-E(X)² = $\sum \boldsymbol{k}^2 \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}) - (\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}})^2 = \ldots$

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}) = \ldots$

Epreuve de Bernoulli et loi Bernoulli:

On s'intéresse ici à la réalisation ou non d'un événement. Autrement dit, on n'étudie
que les expériences aléatoires qui n'ont que deux issues possibles (ex : un client signe le contrat ou non, un électeur vote démocrate ou républicain...).

Considérons une expérience aléatoire de ce type. On l'appelle une **épreuve de Bernoulli**. Elle se conclut par un **succès** si l'événement auquel on s'intéresse est réalisé ou un **échec** sinon.
On associe à cette épreuve une variable aléatoire *Y* qui prend la valeur 1 si l'événement est réalisé et la valeur 0 sinon.
Cette v.a. ne prend donc que deux valeurs (0 et 1) et sa loi est donnée par :

$$P[Y = 1] = p; \quad P[Y = 0] = q = 1 - p$$

On dit alors que ***Y* suit une loi de Bernoulli de paramètre *p*, notée *B*(*p*)**.

La v.a. *Y* a pour espérance *p* et pour variance $p(1 - p)$.
En effet, $E[Y] = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$ et
$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = p(1 - p)$.

Schéma de Bernoulli :

Un **schéma de Bernoulli** est la **répétition *n* fois** de la **même épreuve** dans les mêmes conditions.
Schéma de Bernoulli :
1) Chaque épreuve a **deux issues** : succès [S] ou échec [E].
2) Pour chaque épreuve, la probabilité d'un succès est la même, notons $P(S) = p$ et $P(E) = q = 1 - p$.
3) Les n épreuves sont indépendantes : la probabilité d'un succès ne varie pas, elle ne dépend pas des informations sur les résultats des autres épreuves.

Loi Binomiale B(n,p):

Soit *X* la v.a. qui représente le nombre de succès obtenus lors des *n* épreuves d'un schéma de Bernoulli. Alors on dit que *X* suit une loi binomiale de paramètres (*n; p*), notée *B*(*n; p*). Cette loi est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Si X est une v.a. de loi B(n; p), l'espérance de X vaut

$$E(X) = np$$

et sa variance :

$$Var(X) = np(1 - p).$$

Exemple loi binomiale :

Un nouveau traitement résout le problème de fragilité d'un matériel dans
50% des cas.
1) Si on essaye sur 15 objets, quelle est la probabilité pour qu'au plus 6 de ces
objets soient résistants,
2) pour que le nombre d'objets résistants soit compris entre 6 et 10, pour que deux au plus restent fragiles.
3) Quel est le nombre moyen d'objets rendus résistants par le traitement ?

Autres lois discrètes : Loi géométrique

Au lieu de réaliser un nombre d'essais lors d'un schéma de Bernoulli, l'expérimentateur **s'arrête au premier succès**. La valeur qui nous intéresse est le **nombre d'essais effectués jusqu'au premier succès** inclus. Le nombre de succès est donc fixé à 1, mais le nombre d'essais total *Y* est aléatoire et peut prendre n'importe quelle valeur entière supérieure ou égale à 1.
De plus,

$$\textit{Pour tout } 1 \leq k, \boldsymbol{P[Y = k] = p(1-p)^{k-1}}$$

où *p* est toujours la probabilité de succès des épreuves de Bernoulli.
On dit alors que *Y* suit la loi géométrique de paramètre *p*, notée *G*(*p*).

L'espérance de Y vaut 1-p et sa variance (1 - p)/p².

Autres lois discrètes : Loi de Poisson

Cette loi est une approximation de la loi binomiale quand ***np* est petit et *n* grand (en pratique, *n* >50 et *np* < 10**).
Une v.a. *X* de loi de Poisson de paramètre λ , notée *P*(λ),
vérifie

$$pour\ tout\ k \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

L'espérance et la variance de *X* sont égales à λ

E(X) = λ et Var(X) = λ

On utilise la loi de Poisson pour modéliser le nombre de tâches qui arrivent à un serveur informatique pendant une minute, le nombre de globules rouges dans un ml de sang, le nombre d'accidents du travail dans une entreprise pendant un an...
Dans le cas **de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson, le paramètre de la loi de Poisson est λ = *np*.**

Autres lois discrètes : Loi Uniforme

Mis µa part le prestige dû à son nom, la loi uniforme est la loi de l'absence d'information.
Supposons qu'une v.a. *X* prenne les valeurs 1,2,...,*n*, mais que nous n'ayons aucune idée de la loi de probabilité de *X* ; dans ce cas, après justification, on peut affecter à chaque valeur le même poids : 1*/n*. Et

$$pour\ tout\ k \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{P(X = k) = \frac{1}{n}}$$

On montre facilement que

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{n+1}{2}}$$

$$\textbf{Et } \boldsymbol{Var(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}}$$