Chapitre 1 : Bases de probabilités



Pouvoir utiliser les mathématiques dans la résolution de problèmes permettant d'optimiser les rendements énergétiques

Rappel complet de probabilités

Objectifs :

- Réactiver rapidement les notions de probabilités vues jusqu'au Bac+2.
- Maîtriser les probabilités simples, conditionnelles, l'indépendance et Bayes.
- Être à l'aise avec les représentations : arbres pondérés, tableaux.
- Utiliser les combinaisons et arrangements

A quoi servent les probabilités ?

Il arrive, dans certaines situations, qu'un phénomène réel soit trop complexe à étudier de manière déterministe (trop de paramètres entrent en compte). Par exemple le simple jet d'un dé. Il est alors plus simple de supposer que le « hasard » entre en jeu.

Les probabilités servent précisément à donner un cadre mathématique permettant de comprendre, de calculer et éventuellement de prévoir ce qui se passe.

Cependant avant de pouvoir faire des calculs, il faut introduire un certain formalisme mathématique pour savoir de quoi on parle...

Langage des probabilités

Un univers est un ensemble abstrait noté **Ω** qui décrit, pour une expérience donnée, toutes les issues possibles. Cet ensemble nous informe aussi sur les événements réalisables.

Une issue est un élément de Ω.

Un événement est un sous-ensemble de Ω.

À chaque événement A ⊆ Ω on associera un nombre P [A] appelé « probabilité de A ».

On voit qu'on aura à manipuler des notions ensemblistes. Faisons un

état des lieux. Mais d'abord, un exemple.

Jet de dé

Considérons une expérience très simple : le jet d'un dé à six faces.

On s'intéresse au nombre qui apparaît sur la face du dessus.

L'ensemble Ω peut être choisi de la façon suivante :

Ω = {1,2,3,4,5,6}

On peut s'intéresser à plusieurs événements (en général on veut savoir s'ils ont été réalisés ou non). Par exemple :

A = {2,4,6} , pour savoir si le résultat est un nombre pair.

Opérations sur les ensembles

Les notions importantes sur les ensembles sont les suivantes :

- L'appartenance. On notera $x \in \Omega$ si x appartient à l'ensemble Ω et $x \notin \Omega$ sinon. Par exemple $3/2 \in R$ mais $3/2 \notin N$.
- L'inclusion. On dit que $A \subseteq \Omega$ si tout élément de A est aussi élément de Ω. Dans le cas contraire (si un élément de A n'est pas dans Ω) on notera $A \not\subseteq \Omega$. Dans l'exemple du jet dé, l'événement

  A « avoir un nombre pair » est bien un sous-ensemble de Ω :

  $$\{2,4,6\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$$

- Réalisation. Pour un événement $A \subseteq \Omega$ et un élément $x \in \Omega$, si x appartient à l'ensemble A, on dit que l'évènement A est réalisé. Sinon, on dit qu'il n'est pas réalisé.

  Ainsi $x = 2$ réalise A, mais $x = 3$ ne le réalise pas.

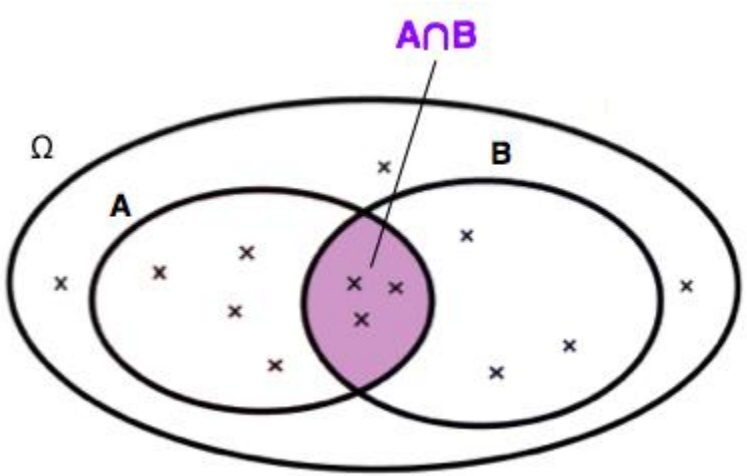
- Événement certain. Ω est l'événement certain. En effet, tout $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$ réalise Ω.
- L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

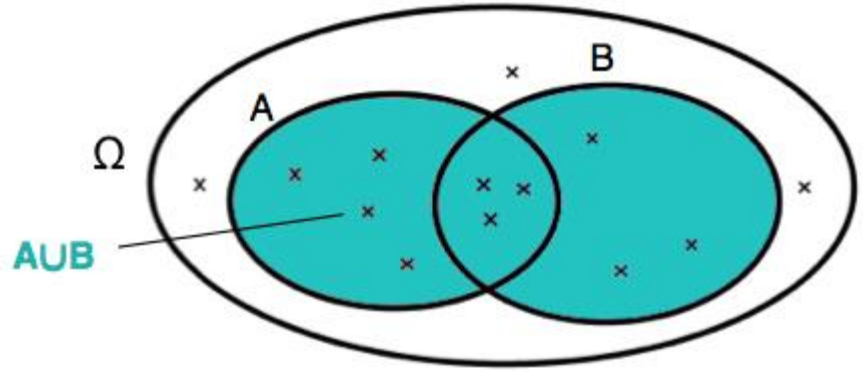
Opérations sur les ensembles

Les opérations importantes sur les ensembles sont les suivantes :

- On note **A ∩ B** l'ensemble des **éléments communs** à A et à B, se lit « A inter B »
- On note **A U B** l'ensemble des éléments qui **appartiennent à A ou à B** (ou aux deux). Se lit « A union B »
- Deux ensemble A et B sont dits **disjoints** s'ils n'ont aucun éléments en commun (A ∩ B = ∅).
- On note $\bar{A}$ le **complémentaire de A** dans Ω, c'est-à-dire les éléments de Ω qui ne sont pas dans A : A ∩ $\bar{A}$ = ∅ et A ∪ $\bar{A}$ = Ω.

Opérations sur les ensembles





Qu’est ce qu’une probabilité ?

Une probabilité est une fonction, en général notée P, qui associe à tout événement $A \subseteq \Omega$ un nombre réel compris entre 0 et 1 et qui modélise... la « chance » de voir cet événement se réaliser.

$$P : \Omega \rightarrow [0,1]$$
$$A \rightarrow P(A).$$

- $P(\Omega) = 1$.
- Si A et B sont disjoints, alors on a : $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$.
- $P(A) = Card(A)/Card(\Omega)$.

Qu’est ce qu’une probabilité : conséquences

Conséquences :

$P(\emptyset) = 0$.
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Deux événements A et B sont dits indépendants, ou encore P-indépendants, si et seulement si **$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.**

Jet de dé (la suite)

Attention ! Le choix d'une probabilité n'est pas unique. Selon la situation à modéliser on introduira telle probabilité plutôt qu'une autre.

Dé bien équilibré : On choisit $P(\{i\}) = 1/6$ pour tout $i \in \Omega$.
Dé truqué : On choisit par exemple

$$P(\{6\}) = 1/2$$
$$P(\{i\}) = 1/10, \forall i \in \Omega \setminus \{6\}$$

On notera dans la suite : P(i) à la place de P({i}) afin d'alléger les notations.

Exercice 1 :

On jette un dé bien équilibré. Décrire mathématiquement les événements suivants et donner les probabilités qui leur sont associées :
A : « Le résultat est un nombre pair ».
B : « Le résultat est supérieur ou égal à 5 ».
C : « Les événements A et B sont réalisés tous les deux ».
D : « L'un des événements A ou B est réalisé ».

Exercice 2 :

Le gène de la mucoviscidose est récessif et porté par la paire chromosomique n◦ 7. En France, sur 60×10^6habitants, 8000 sont atteints de cette maladie. Quelle est la probabilité qu'un individu soit porteur d'au moins un gène ?

Exercice 3 :

On lance un dé bien équilibré deux fois de suite. On s'intéresse aux deux résultats successifs dans l'ordre des jets.
1) Définir Ω et donner la probabilité élémentaire associée.

2) Décrire les événements suivants et donner les probabilités associées :
A : « Le premier jet est pair ».
B : « Le second jet est impair ».
C : « La somme des deux dés dépasse ou égale 10 ».

Prendre en compte une information supplémentaire : probabilités conditionnelles

Il arrive souvent, en pratique, qu'on s'intéresse non pas directement à la probabilité d'un événement mais plutôt à sa probabilité sachant qu'un autre événement s'est produit.
Par exemple :
Quelle est la probabilité d'attraper la grippe sachant qu'on a été vacciné ?
Quelle est la probabilité d'être atteint d'une maladie sachant qu'un test de dépistage est positif ?
Bref, les exemples ne manquent pas...

Vers une définition

Intéressons-nous à un cas simple. Sur une population de 10000 personnes, 3000 sont vaccinées contre la grippe, 2000 ont eu la grippe dont 500 parmi les personnes vaccinées.
Notons Ω l'ensemble de la population, V la population vaccinée, G la population ayant eu la grippe. Bien sûr, G ∩ V représente la population vaccinée ayant tout de même souffert de la grippe.
On peut déduire de ce qui précède que :
P[V] = Card(V)/Card(Ω) = 3/10
P[G] = Card(G)/Card(Ω) = 1/5
P[G ∩ V] = Card(G∩V)/Card(Ω) = 1/20
Notre problème est de définir la probabilité d'avoir eu la grippe sachant qu'on était vacciné notée traditionnellement P[G|V] ou PV [G].

Définition probabilité conditionnelle

Suivant la même logique, on peut écrire :

$$P(G|V) = \ldots$$

Soit A et B deux événements tels que P(B) > 0. On définit la probabilité de A sachant que B est réalisé :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap \mathrm{B})}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

Formule de Bayes

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. Il arrive qu'on connaisse P[A|$\bar{B}$], P[A|B] et P[B] et qu'on veuille déduire P[B|A].
Est-ce possible ?

Exercice 4 :

Deux usines fabriquent des ampoules. 1% des ampoules fabriquées par la première usine et 3% des ampoules fabriquées par la seconde usine sont défectueuses.
Dans un lot de 1000 ampoules, 600 viennent de la première usine et 400 de la seconde usine. On tire au hasard une ampoule et celle-ci est défectueuse.
Quelle est la probabilité pour que l'ampoule défectueuse provienne de la première usine ?

Exercice 5 :

On dispose d'un test de dépistage d'une maladie. En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100%. Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99,9 fois sur 100.
Mais 4 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade.
Environ 2/1000 de la population est atteinte par cette maladie.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ?

Evénements indépendants

Soit A et B deux événements. Intuitivement, dire que A est indépendant de B signifie qu'avoir une connaissance sur la réalisation de B n'influe pas sur le fait que A puisse se réaliser ou non.
Mathématiquement :

$$P[A|B] = P[A].$$

Or

$$P[A|B] = P[A \cap B]/P[B]$$

Et donc, si A était indépendant de B, on devrait avoir :

Formule de l'indépendance : $P[A \cap B] = P[A] \times P[B]$.

On retrouve la caractérisation de l'indépendance.

Exercice 6 :

On jette deux fois de suite le même dé bien équilibré. Rappelons qu'on peut modéliser cette situation de la manière suivante (en notant $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$) :

$$\Omega^2 = \{(i,j) : i \in \Omega, j \in \Omega\}, P[(i,j)] = 1/36, \forall (i,j) \in \Omega^2\}.$$

On considère les événements suivants :

A : « On obtient 6 au premier jet ».

B : « On obtient 1 au second jet ».

C : « On obtient un résultat pair au premier jet ».

D : « La somme des deux jets vaut 7 ».

Montrer que A et B sont indépendants et que C et D le sont aussi.

Combinatoire et dénombrement

Définitions :

- Un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
- Le **nombre d'éléments de E est appelé le cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.
- **Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments** que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal

Combinatoire et dénombrement

Exercice 7 : On considère les 3 ensembles suivants :
$E1 = \{renard\ roux, renard\ noir, renard\ blanc\}$
$E2 = \{femme\ rousse, femme\ brune, femme\ blonde\}$
$E3 = \{robe\ rouge, robe\ noire, robe\ blanche\}$
Les femmes choisissent une robe et un renard de façon aléatoire.
On appelle produit cartésien $E1 \times E2 \times E3$, l'ensemble de tous les triplets formés d'un élément de $E1$, d'un élément de $E2$ et d'un élément de $E3$.
La photo présente 3 triplets, de gauche à droite :
$(renard\ blanc, femme\ brune, robe\ rouge)$
$(renard\ roux, femme\ blonde, robe\ noire)$
$(renard\ noir, femme\ rousse, robe\ blanche)$



Combien y a-t-il de résultats (triplets) différents ?

Combinatoire et dénombrement

Propriété (principe multiplicatif) :
Soit p ensembles finis $E1$, $E2$, … , En.
Alors on a : $\boldsymbol{Card(E1 \times E2 \times \ldots \times En) = Card(E1) \times Card(E2) \times \ldots \times Card(En)}$

Exercice 8 :

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

Combinatoire et dénombrement : k-uplet

DÉFINITION
Un 2−uplet est un couple et un 3−uplet est un triplet.
Un **k−uplet de E est une liste ordonnée d'éléments de E**.

REMARQUES
Par exemple, le triplet (1 ; 2 ; 3) n'est pas égal au triplet (2 ; 1 ; 3).

EXEMPLE
(−2 ; 3) est un couple d'éléments de R.
(f ; u ;t; u ; r) est un 5−uplet d'éléments de l'ensemble des 26 lettres E = {a ; b ; ... ; z}.

PROPRIÉTÉ
Soit E un ensemble fini non vide et k un entier naturel non nul. Alors :

$$\mathbf{Card}(E^k) = Card(E)^k$$

Autrement dit, le nombre de k−uplets d'un ensemble E est $Card(E)^k$.

Combinatoire et dénombrement : k-uplet

Exercice 9 :

« Il y avait pour entrer juste un digicode Deux lettres et dix chiffres incommodes Un détail que t'avais surement oublié 4 milliards de possibilités »

Le refrain de la chanson « Digicode » de l'artiste Oldelaf comporte une erreur à corriger en considérant que le code est constitué de 2 lettres (parmi A, B, C, … Z) suivies de 10 chiffres (parmi 0, 1, 2, … 9).
Par exemple, RT 49903 42472 pourrait être un code à composer sur le digicode.
Quelle est cette erreur ?

Combinatoire et dénombrement : k-uplet distincts ou arrangements

DÉFINITION

Factorielle d'un entier naturel

Soit n un entier naturel non nul. On appelle factorielle n, l'entier naturel noté n! (« factorielle n ») défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

REMARQUE

Par convention, on admet que 0 ! = 1.

EXEMPLE :

1) Calculer 4 !

2) Calculer astucieusement $\frac{7!}{5!}$.

Combinatoire et dénombrement : k-uplet distincts ou arrangements

DÉFINITION

Arrangements d'un ensemble

Soient n un entier naturel non nul, E un ensemble fini non vide à n éléments et soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

On appelle arrangement de k éléments de E tout k−uplet d'éléments distincts de E.

EXEMPLES

1) Soit E = {a ; b ; c}. Alors les couples (a ; b) et (c ; a) sont deux arrangements possibles de 2 éléments de E. Le couple (a ; a) n'est pas un arrangement car ses éléments ne sont pas distincts.

2) Une course a lieu entre 20 compétiteurs. Le podium à l'issue de la course est un arrangement de 3 éléments de l'ensemble des 20 compétiteurs.

Combinatoire et dénombrement : k-uplet distincts ou arrangements

PROPRIÉTÉ

Soient n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n éléments est :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dans le premier exemple, il y a donc $\frac{3!}{(3-2)!} = 3 \times 2 / 1 = 6$ arrangements possibles.

Dans le 2ème exemple, il y a donc

$$\frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20x19x18x17x16x,,,x1}{17x16x,,,x1} = 20 \times 19 \times 18 = 6840 \text{ podium possibles.}$$

Combinatoire et dénombrement : k-uplet distincts ou arrangements

EXERCICE 10

Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité de 4 membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire.
Combien de comités différents peut-elle élire ?

Combinatoire et dénombrement : Permutation

DÉFINITION
Une permutation de E est donc un arrangement de n éléments de E.
REMARQUE Si E = {a ; b ; c}, alors les triplets (a ; b ; c) et (b ; a ; c) sont deux permutations (distinctes) de E.

EXEMPLES
On considère un jeu de 32 cartes. Alors tout mélange de ce jeu est une permutation de l'ensemble des cartes du jeu.

PROPRIETE : Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est **n!.**

SUITE EXEMPLE : Il y a 32! = 2,6x10^{35} mélanges de jeux possibles

Combinatoire et dénombrement : Combinaison

DÉFINITION
Parties d'un ensemble
Une **partie** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E, c'est-à-dire un ensemble constitué d'éléments de E.
EXEMPLE
Si E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}, alors les ensembles {2 ; 5}, {3}, E et Ø sont des parties de E.
Attention : ne pas confondre une partie d'un ensemble avec un k-uplet de cet ensemble. **Dans une partie l'ordre ne compte pas**

Par exemple, {1 ; 2} est une partie à deux éléments de l'ensemble N, et on a {1 ; 2} = {2 ; 1}

Combinatoire et dénombrement : Combinaison

DÉFINITION Combinaisons

Soit n un entier naturel. Soit E un ensemble fini à n éléments et soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

On appelle **combinaison** de k éléments de E toute **partie de E à k éléments.**

Le nombre de combinaison de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

Combinatoire et dénombrement : Combinaison

EXERCICE 11 :
Au loto, on choisit 5 numéros entre 1 et 50. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

EXERCICE 12 :
Pour gagner à l'Euromillions, il faut deviner les 5 bons numéros parmi 50 nombres, et les 2 étoiles gagnantes parmi 12 étoiles. Quelle est la probabilité de gagner le premier prix à l'Euromillions ?